مبرهنة:

اذا كان الفضاء الطوبولوجي X معدوداً ثانياً فانه يملك مجموعة كثيفة قابلة للعد "أي انه فصول او انفصالي"

البرهان:

بما أن X معدود ثاني حسب التعريف هو يملك قاعدة قابلة للعد ولتكن اسرة المجموعات المفتوحة $\{U_n\}_{n\in N}$

نختار من كل مجموعة U_n نقطة x_n فنحصل على المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

وهي مجموعة قابلة للعد وهذه المجموعة كثيفة لانها تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة غير الخالية كون U_n قاعدة وهو المطلوب

---

* موضوعات الفصل:

هناك عدة موضوعات للفصل سندرس الثلاثة الاولى منها

1- موضوعة الفصل الصفرية T_0:

وهي انه من اجل اي نقطتين مختلفتين من فضاء طبولوجي يوجد لاحداهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى.
إن الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعة نسميه "T_0 فضاء" او احياناً يسمى فضاء (كلماغوروف)

مثال (1):

ليكن لدينا الفضاء $X=\{a,b\}$ ، $\tau=\{\emptyset, X\}$
في هذا الفضاء لـ a جوار وحيد هو X

/ /

وبما أنّ لـ b جوار وحيد هو X

وبالتالي هذا الفضاء ليس T_0 فضاء

ملاحظة:

بما أنه توجد فضاءات ليست T_0 - فضاء فإنّ للتعريف معنا لكن نلاحظ أن الفضاءات التي ليست T_0 فضاء ليس لها أهمية من الناحية العملية.

مثال (2)

ليكن لدينا الفضاء $X = \{a, b\}$ $\quad T = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

هذا الفضاء T_0 فضاء لأنه يكفي أنه يوجد جوار لأحد النقاط لا يحوي النقطة الأخرى

نلاحظ أنّ a يملك جوار $\{a\}$ لا يحوي النقطة b

الفضاء T_0 مكافئات سنذكر أحدهما من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة:

ليكن X فضاء طبولوجي إنّ القضيتين الذين متكافئتين

1. X هو T_0 فضاء

2. $\{x\} \neq \{y\}$ من أجل اي نقطتين x, y من X

البرهان:

$1 \Rightarrow 2$

بفرض x, y نقطتان من X بحيث $x \neq y$، فيوجد لإحداهما ولتكن النقطة x جوار لا يحوي النقطة y وهذا يعني أنّ $x \notin \overline{\{y\}}$ ولكن $x \in \overline{\{x\}}$ وبالتالي $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

$2 \Leftarrow 1$

نفرض أنّ الشرط محقق أي $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

ولنفرض جدلاً أن الفضاء X ليس T_0 فضاء هذا يعني أنّ

أي جوار لـ x يحوي y وأي جوار لـ y يحوي x

وهذا يعني أنّ

$\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ ، $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ أي أنّ

$\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$ وهذا يناقض الفرض أي أنّ الفرض الجدلي

خاطئ وبالتالي الفضاء X هو T_0 فضاء.

بالعودة إلى المثالين السابقين:

$X=\{a,b\}$ ، $\tau=\{\emptyset, X\}$

هنا نجد أنّ $\overline{\{a\}} = X$ كما أنّ $\overline{\{b\}} = X$ أي أنّ

$\overline{\{b\}} = \overline{\{a\}}$

والفضاء ليس T_0 فضاء.

$X=\{a,b\}$ ، $\tau=\{\emptyset, \{a\}, X\}$

هنا نجد $\overline{\{a\}} = X$ ، $\overline{\{b\}} = \{b\}$ لأنها مغلقة

$\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

/ /

2- موضوعة الفصل الأولى T_1 :

وهي أنه من أجل أي نقطتين مختلفتين في فضاء طبولوجي يوجد لكل منها جوار لا يحوي النقطة الأخرى

إن الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعة نطلق عليه اسم (T_1 فضاء)

نستنتج من هذا التعريف أنه موضوعة الفصل الصفرية T_0 تستنتج من موضوعة الفصل الأولى

" أي أن كل T_1 - فضاء هي T_0 فضاء "
والعكس غير صحيح

مثال :

لدينا $X = \{a, b\}$ $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

هذا الفضاء هو T_0 فضاء ولكنه ليس T_1 فضاء

لأنه : جوار a هو {a} لا يحوي b

يوجد جوار لـ {a} لا يحوي {b}

لكن لا يوجد جوار لـ b لا يحوي a جوار b هو X يحوي a

أي : أي جوار لـ b " X فقط " يحوي a

مثال :

لنأخذ الفضاء المتقطع $T(X, \tau)$; T قوية

هذا الفضاء هو T_1 فضاء لأن من أجل أي نقطتين مختلفتين x,y يوجد لـ x جوار هو {x} لا يحوي y

لأن كل المجموعات مفتوحة ويوجد لـ y جوار هو {y} لا يحوي x

Alamal

كلمة جوار نستطيع أن نبدلها بمجموعة مفتوحة

مثال:

لو أخذنا R مجموعة الاعداد الحقيقية:

$\tau = \{ u \subseteq R \;;\; 1 \in u \} \cup \{ \emptyset \}$

لدينا جوار لـ x هو $\{x,1\}$ ومماثل جوار لـ y هو $\{y,1\}$
والجوار الأول لا يحوي y والثاني لا يحوي x
وذلك عندما $x,y \neq 1$

لكن اذا كان $(x=1 \,,\, y \neq 1)$ عندئذ يكون جوار y هو $\{y,1\}$
أي أنّ أي جوار لـ y يحوي x عندئذ الفضاء
ليس T_1 فضاء ولكنه T_0 فضاء

للفضاء T_1 مكافئات عدة سنأخذ أهمها:

مبرهنة:

ليكن X فضاء طبولوجي ! انّ القضيتين الآتيتين متكافئتين:

1- X هو T_1 فضاء
2- المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ مغلقة مهما تكن $x \in X$.

البرهان:

$(1 \Leftarrow 2)$

نفرض نقطة x من الفضاء ولنثبت أن المجموعة وحيدة العنصر هذه $\{x\}$ مغلقة.

يتم ذلك بإثبات أن متممها مفتوحة أي $X / \{x\}$ مفتوحة
وليتم ذلك نأخذ نقطة كيفية من هذه المتممة بطبيعة الحال أصبحت $x \neq y$

حسب التمرين

ولتكن هذه النقطة $y \in X / \{x\}$

يوجد جوار مفتوح u_y لا يحوي x

لدينا:

$$X/\{x\} = \bigcup \{y\} \subseteq u_y \subseteq X/\{x\}$$

$$X \setminus \{x\} = \bigcup u_y$$

$\Leftarrow$

أي انها تساوي اجتماع المجموعات المفتوحة فهي مفتوحة ومنه فان $\{x\}$ مغلقة

$(1 \Leftarrow 2)$

لنأخذ نقطتين مختلفتين $x \neq y$ من X وبالفرض لدينا $\{x\}$ مغلقة وكذلك الأمر بالنسبة لـ $\{y\}$ أي أن $\{y\}$ مغلقة.

بالتالي $X \setminus \{x\}$ مفتوحة وتحوي y فهي جوار لـ y لا تحوي x

وأيضاً $X \setminus \{y\}$ مفتوحة وتحوي x فهي جوار لـ x لا يحوي y

وبالتالي فان X هو T_1 فضاء

تنبيه:

أي مجموعة منتهية في T_1 فضاء هي مجموعة مغلقة.

مثال:

ليكن X هو T_1 فضاء و A مجموعة منتهية من X و x عنصر لا ينتمي إلى A عندئذ يوجد جوار للنقطة x لا يتقاطع مع A

الحل:

لنأخذ المجموعة المنتهية $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ، ولكن $x \notin A$
بما أنّ الفضاء T_1 عندئذ يوجد جوار V_1 لـ x لا يحوي a_1
ويوجد جوار V_2 لـ x لا يحوي النقطة a_2 وهكذا .....
V_n جوار لـ x لا يحوي a_n بالتالي

$$V=\bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

أي أنّ تقاطع الجوارات هو جوار لـ x ولا يتقاطع مع A

مبرهنة:

ليكن X هو T_1 فضاء و A مجموعة جزئية من X ولتكن x نقطة من الفضاء.
تكون النقطة x نقطة تراكم للمجموعة A اذا وفقط اذا كان أي جوار للنقطة يتقاطع مع A بعدد غير منته من العناصر.

البرهان: $(1 \leftarrow 2)$

اذا كان أي جوار للنقطة x يحوي مالانهاية من عناصر A فمعنى ذلك أن النقطة x هي نقطة تراكم.

$(2 \leftarrow 1)$

لنفرض أنّ x هي نقطة تراكم للمجموعة A ولنفرض جدلاً أنه يوجد جوار للنقطة x مثلاً U بحيث أنّ تقاطعه مع A منته

$V \cap A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

عندئذٍ بحسب تمرين سابق يوجد جوار W لـ x بحيث أنّ:

$\{x\} \supseteq (V \cap A) \cap W = A \cap (V \cap W)$

ولكن $V \cap W$ هو جوار لـ x (تقاطع جوارين لـ x) عندئذٍ

$(V \cap W) \cap A / \{x\} = \phi$

وهذا يعني أنّ x ليست نقطة تراكم وهذا يناقض الفرض

ملاحظة:

في الفضاء T_1 تكون النقطة اللاصقة بالمجموعة إمّا نقطة تراكم أو نقطة منعزلة.

ملاحظة:

تكون المجموعة مغلقة إذا حوت مشتقها.
